ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σελίδα 43 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία Σελίδα 58 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία. Σελίδα 83 του σχολικού βιβλίου.

Α4. **α**. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$

$$2\vec{\alpha}^2-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\beta}^2=0\overset{|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2}{\Leftrightarrow}2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\cdot1^2=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1.$$

Β2. Έστω $\varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}}\right)$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\overset{(B1)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot1}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{άρα}\ \hat{\varphi}=45^{o}.$$

Β3. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot1+1^2=5\Rightarrow\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{5}$

$$\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=\left(2\vec{\alpha}\right)^2-2\cdot2\vec{\alpha}\cdot3\vec{\beta}+\left(3\vec{\beta}\right)^2=4\left(\sqrt{2}\right)^2-12\cdot1+9\cdot1^2=5$$

$$\Rightarrow\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=\sqrt{5}$$

Οπότε $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$.

Δεύτερος τρόπος.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$ ή $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2$ ή $\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2$

ή $3\vec{\alpha}^2-14\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+8\vec{\beta}^2=0$ ή $3\cdot 2-14\cdot 1+8\cdot 1=0$, ισχύει.

Β4. Έστω $\vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$, τότε γνωρίζουμε ότι $\vec{\gamma}\,//\,\vec{\alpha}$ δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός μ ώστε να ισχύει $\vec{\gamma}=\mu\cdot\vec{\alpha}$ (1).

Σύμφωνα με τον τύπο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}\cdot\left(\mu\cdot\vec{\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=\mu\left|\vec{\alpha}\right|^2\Leftrightarrow\mu=\frac{\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\Leftrightarrow\mu=\frac{2\left|\vec{\alpha}\right|^2-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\Leftrightarrow$$

$$\mu=\frac{2\cdot 2-3\cdot 1}{2}\Leftrightarrow\mu=\frac{1}{2}.$$

Τελικά από τη σχέση (1) προκύπτει: $\vec{\gamma}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τις κορυφές Β, Γ του τριγώνου είναι: $\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{1-4}{2-4}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$.

Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου θα είναι:

$$y-y_\Gamma=\lambda_{B\Gamma}\left(x-x_\Gamma\right)\Leftrightarrow y-1=\frac{3}{2}(x-2)\Leftrightarrow y-1=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\cdot 2\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{3}{2}x-3+1\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-2\Leftrightarrow 2y=3x-4\Leftrightarrow 3x-2y-4=0.$$

Το ύψος ΓΔ του τριγώνου είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ οπότε θα ισχύει: $\Gamma\Delta\perp AB\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}\cdot\lambda_{AB}=-1$ (1)

Όμως $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-(-1)}{4-5}=\frac{4+1}{-1}=-5$

Από (1) $\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}\cdot(-5)=-1\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{1}{5}$.

Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου θα είναι: $y-y_\Gamma=\lambda_{\Gamma\Delta}\left(x-x_\Gamma\right)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{5}\left(x-2\right)\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}+1\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\Leftrightarrow 5y=x+3\Leftrightarrow x-5y+3=0$.

Γ2. Για τις ευθείες που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1: x=2\Leftrightarrow x-2=0$ είναι λύση, δηλαδή αν $d\left(O,\varepsilon_1\right)=2$.

Έχουμε: $d\left(O,\varepsilon_1\right)=\frac{\left|Ax_o+By_o+\Gamma\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|1\cdot 0+0\cdot 0-2\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{\left|-2\right|}{\sqrt{1}}=\frac{2}{1}=2$.

Άρα η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1: x=2$ αποτελεί λύση.

2η περίπτωση: Εξετάζουμε αν υπάρχουν ευθείες της μορφής: $\varepsilon: y-y_\Gamma=\lambda\left(x-x_\Gamma\right)\Leftrightarrow y-1=\lambda\left(x-2\right)\Leftrightarrow y-1=\lambda x-2\lambda\Leftrightarrow \lambda x-y+1-2\lambda=0$ που να αποτελούν επίσης λύση.

Πρέπει και αρκεί:

$$d\left(O,\varepsilon\right)=2\Leftrightarrow\frac{\left|Ax_o+By_o+\Gamma\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\Leftrightarrow\frac{\left|\lambda\cdot 0-1\cdot 0+1-2\lambda\right|}{\sqrt{\lambda^2+\left(-1\right)^2}}=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left|1-2\lambda\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow\left|1-2\lambda\right|=2\sqrt{\lambda^2+1}\overset{\left|1-2\lambda\right|\geq 0,\,2\sqrt{\lambda^2+1}>0}{\Leftrightarrow}\left|1-2\lambda\right|^2=\left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(1-2\lambda\right)^2=4\left(\lambda^2+1\right)\Leftrightarrow 1-4\lambda+4\lambda^2=4\lambda^2+4\Leftrightarrow 4\lambda=-3\Leftrightarrow\lambda=-\frac{3}{4}$$

Άρα η ευθεία,

$$\varepsilon: -\frac{3}{4}x-y+1-2\left(-\frac{3}{4}\right)=0\Leftrightarrow-\frac{3}{4}x-y+1+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow -3x-4y+10=0$$

αποτελεί επίσης λύση.

Γ3. i) Αφού η παραβολή C έχει κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$, θα έχει εξίσωση της μορφής $C: x^2=2py$.

$\Gamma\left(2,1\right)\in C\Leftrightarrow x_\Gamma^2=2py_\Gamma\Leftrightarrow 2^2=2p\cdot 1\Leftrightarrow 2p=4\Leftrightarrow p=2$.

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $C: x^2=2\cdot 2y\Leftrightarrow x^2=4y$.

ii) Έστω ε η εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.
Αν $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ε με την C θα είναι:

$$\varepsilon: xx_1 = p(y+y_1) \overset{p=2}{\Leftrightarrow} xx_1 = 2(y+y_1) \Leftrightarrow$$

$$xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1 \;\; (2)$$

Αφού η $\varepsilon // B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3$.

Όμως το $M(x_1, y_1) \in C \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 3^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 4y_1 = 9 \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{4}$.

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 4\frac{3}{2}x - 4\frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 6x - 9 \Leftrightarrow 6x - 4y - 9 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $C_1: 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

Έχουμε: $\alpha^2 = 4$, $\beta^2 = 3$ και επειδή $4 > 3$ οι εστίες της C_1 βρίσκονται στον x΄x.

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$.

Ε΄(-1,0), Ε(1,0) και $B(0,\sqrt{3})$ ή $B(0,-\sqrt{3})$.

$$(BE') = \sqrt{(x_{E'} - x_B)^2 + (y_{E'} - y_B)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(BE) = \sqrt{(1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(E'E) = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

Το τρίγωνο ΒΕ΄Ε είναι ισόπλευρο.

Δεύτερος τρόπος

ΒΟ (ή Β΄Ο) ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΒΕ΄Ε (ή Β΄Ε΄Ε) , άρα ΒΕ = ΒΕ΄.

Το Β είναι σημείο της έλλειψης $(BE) + (BE') = 2\alpha \underset{BE=BE'}{\overset{\alpha=2}{\Rightarrow}} (BE) = (BE') = 2$.

Επίσης (Ε΄Ε) = 2, επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς 2.

Δ2. Αν αντικαταστήσουμε $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ στις εξισώσεις των δύο κωνικών, παρατηρούμε ότι επαληθεύονται.

Πράγματι: $3(\sqrt{2})^2 + 4(\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12$ και $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$, άρα το σημείο $P(\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό των C_1,C_2.

Το σύστημα των εξισώσεων των C_1,C_2 μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα με αγνώστους x^2,y^2 . Δεδομένου ότι έχει τη λύση $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ οι υπόλοιπες λύσεις θα είναι: $(\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$,που είναι και οι συντεταγμένες των υπολοίπων κοινών σημείων.

Δεύτερος τρόπος.

Τα σημεία τομής των κωνικών προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ x^2+y^2=\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ 4x^2+4y^2=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2\\ y^2=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\sqrt{\frac{3}{2}}\end{cases} \text{ή } \begin{matrix}x=\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{\frac{3}{2}}\end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix}x=-\sqrt{2}\\ y=\sqrt{\frac{3}{2}}\end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix}x=-\sqrt{2}\\ y=-\sqrt{\frac{3}{2}}\end{matrix}$$

Τρίτος τρόπος

Αφού παρατηρήσουμε ότι $P(\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό σημείο των C_1,C_2 και γνωρίζοντας ότι οι κωνικές έχουν άξονες συμμετρίες x΄x, y΄y και κέντρο συμμετρίας το Ο, συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα κοινά σημεία είναι: $(\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Δ3. $2(OM)^2=7\Leftrightarrow(OM)=\sqrt{\frac{7}{2}}$, άρα το Μ θα είναι σημείο του κύκλου C_2.

$(ME)+(ME')=4\overset{\alpha=2}{\Leftrightarrow}(ME)+(ME')=2\alpha$, άρα το Μ είναι σημείο της έλλειψης C_1 . Το Μ είναι κοινό σημείο των C_1, C_2, επομένως από το Δ2,

$M(\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $M(\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $M(-\sqrt{2},\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $M(-\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_1, έστω ε_P, στο $P\left(\sqrt{2},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ είναι:

$$\varepsilon_P:\frac{xx_1}{4}+\frac{yy_1}{3}=1\Leftrightarrow 3xx_1+4yy_1=12\Leftrightarrow 3x\sqrt{2}+4y\sqrt{\frac{3}{2}}=12.$$

Η ε_P έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=-\dfrac{3\sqrt{2}}{\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E'PE}$, έστω δ, είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε_P στο σημείο P, επομένως αν λ΄ είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της δ, τότε: $\lambda\cdot\lambda'=-1\Leftrightarrow\lambda'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Η ευθεία δ διέρχεται από το $P\left(\sqrt{2},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως

$\lambda'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, άρα, $\delta: y-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{2})$.